

臺北市立第一女子高級中學 107 學年度第一次代理教師甄選物理科筆試題目卷

准考證號碼：

姓名：

※ 注意：請務必於上方欄位填寫「准考證號碼」及「姓名」。
解答請直接寫在答案區，背面切勿作答。

(題目)

1. 請敘述哈伯定律的內容(包含哈伯常數的意義及數值)? (6 分)
請利用哈伯常數簡要估計宇宙年齡(需寫出計算過程)? (4 分)

(答案)

(1) 天文學家發現大多數遠方星系皆正在遠離我們，並且遠離速率 v 與和我們之間的距離 d 成正比，即 $v = H_0 d$ ，其中

哈伯常數 $H_0 = 22 \frac{\text{km/s}}{\text{Mly}}$ ，代表每多遠離一百萬光年，遠離速率會增加 22 km/s。

(2) 估計宇宙年齡： $t = \frac{d}{v} = \frac{1}{H_0} = \frac{10^6 \times 3 \times 10^5}{22} = 136 \times 10^8 \text{ 年 (約 140 億年)}$

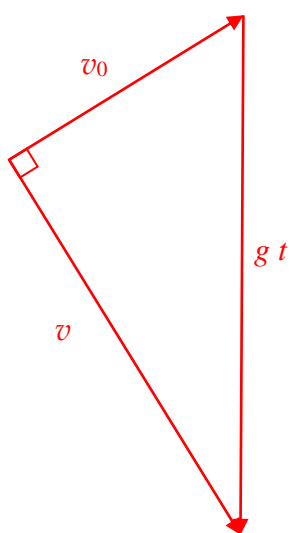
彌封處，請勿作答

（題目）

2. 在重力場為 g 之處，一小球自懸崖邊以初速 v_0 斜向拋射入空中，已知歷經時間 t 後，其速度方向垂直於初速度方向，則該小球當時的瞬時速度量值為何？(10 分)

（答案）

$$v = \sqrt{(gt)^2 - v_0^2}$$



彌封處，請勿作答

(題目)

3. 某陸軍部隊全長 1200 m，正以 1.5 m/s 之速度等速前進，傳令兵由隊伍的最末端以跑步方式等速跑向隊伍的最前方後，立即又以原速率跑回隊伍的最末端，共用去 10 分鐘，求傳令兵跑步之平均速率為多少 m/s？(5 分)

(答案)

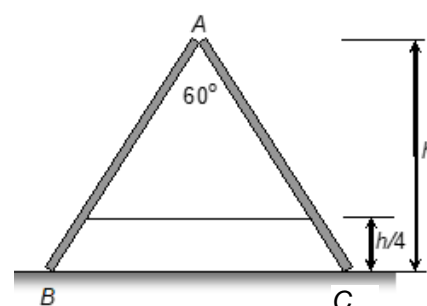
$$\frac{1200}{v-1.5} + \frac{1200}{v+1.5} = 10 \times 60 \Rightarrow v = 4.5(\text{m/s})$$

彌封處，請勿作答

(題目)

4. 如右圖所示，兩鋁梯以鉸鏈連接在 A 點並且置於光滑水平地面，距地面 $1/4$ 高度處有一細繩連接兩梯，使兩梯間恰成 60° 而平衡。設兩梯質量皆為均勻且長度，但其重量不等，左梯重 W ，右梯重 $3W$ ，則

- (1) 地面在 B 點施予左梯腳的作用力為何？(4 分)
- (2) 細繩張力為何？(4 分)
- (3) 鉸鏈連接處 A 點的作用力為何？(4 分)



(答案)

- (1) 設梯長為 L

$$\sum \vec{\tau}_C = 0$$

$$N_B = \frac{W\left(\frac{3L}{4}\right) + 3W\left(\frac{L}{4}\right)}{L} = \frac{3}{2}W$$

- (2) Take left side ladder as free body,

$$\sum \vec{\tau}_A = 0$$

$$T = \frac{\frac{L}{2} \times \left(\frac{3}{2}W\right) - \frac{L}{4} \times W}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)} = \frac{4\sqrt{3}}{9}W$$

- (3) Take left side ladder as free body,

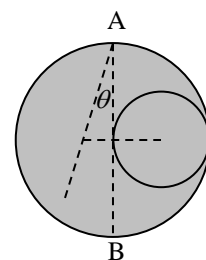
$$\sum \vec{F} = 0$$

$$N_A = \sqrt{\left(\frac{3}{2}W - W\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{9}W\right)^2} = \sqrt{\frac{91}{108}}W = \frac{\sqrt{273}}{18}W$$

彌封處，請勿作答

(題目)

5. 將半徑為 R 的均勻圓形薄板，挖去一個直徑為 R 的內切圓，如右圖所示。若將剩餘部份以細繩自 A 點懸起，則平衡時直徑 AB 將與鉛直方向夾角為何？(5 分)

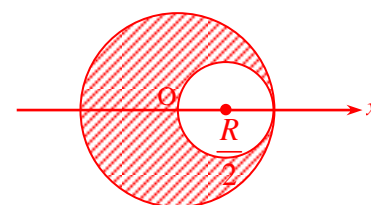


(答案)

先找出對稱軸(x 軸)，已知挖掉的部分與原有的質量比為(-1)：4 所以重心的位置在

$$x_c = \frac{4 \times 0 + (-1) \times \frac{R}{2}}{4 + (-1)} = -\frac{R}{6}$$

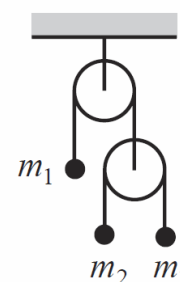
$$\text{最後 } \tan \theta = \frac{R/6}{R} = \frac{1}{6} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{1}{6}$$



彌封處，請勿作答

(題目)

6. 有三個小球質量分別為 $m_1=3m$ 、 $m_2=2m$ 、 $m_3=m$ 。若重力加速度為 g ，不計一切摩擦力與繩及滑輪的質量，試求三個小球的加速度分別為何？(12 分)



(答案)

$$a_1 = \frac{1}{17}g, a_2 = \frac{5}{17}g, a_3 = \frac{7}{17}g$$

詳解

$$\text{for } m_1: 3mg - T_1 = 3ma_1 \quad (1)$$

$$\text{for } m_2 \text{ and } m_3 \text{ system: } g' = g + a_1$$

$$\text{let } a_{2w} = a_{3w} = a'$$

$$2m(g + a_1) - T_2 = 2ma' \quad (2)$$

$$T_2 - m(g + a_1) = ma' \quad (3)$$

by (2) and (3)

$$a' = \frac{1}{3}(g + a_1) \quad (4)$$

$$T_2 = 4ma' = \frac{4}{3}m(g + a_1) \quad (5)$$

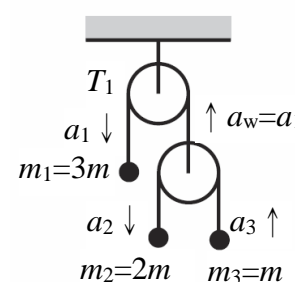
$$T_1 = 2T_2 = \frac{8}{3}m(g + a_1) \quad (6)$$

$$(6) \text{ 代入 } (1), a_1 = \frac{1}{17}g \text{ 代入 } (4)$$

$$a_{2w} = a_{3w} = a' = \frac{6}{17}g$$

$$a_2 = a_{2w} \downarrow + a_w \uparrow = \frac{6}{17}g - \frac{1}{17}g = \frac{5}{17}g \downarrow$$

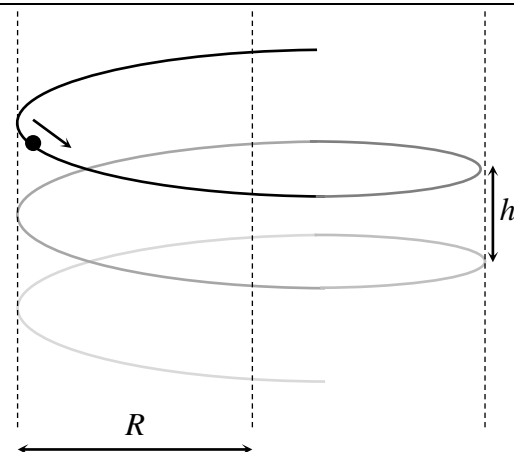
$$a_3 = a_{3w} \uparrow + a_w \uparrow = \frac{6}{17}g + \frac{1}{17}g = \frac{7}{17}g \uparrow$$



彌封處，請勿作答

(題目)

7. 一根長金屬絲繞成螺距為 h 、半徑為 R 的螺旋線。螺旋線中心軸沿鉛直豎立而靜置於平面上。有一顆串珠沿螺旋線滑下。設金屬絲與串珠間的動摩擦係數為 μ 、重力加速度的量值為 g ，則此串珠滑下的終端速率為何？(12 分)



(答案)

螺旋線角度 α

$$\tan \alpha = \frac{h}{2\pi R}$$

當串珠達到終端速度，串珠合力為零。

沿著串珠速度方向

$$mg \sin \alpha = \mu N$$

垂直串珠速度方向

$$mg \cos \alpha = N \sin \beta$$

串珠在水平方向做等速率圓周運動

$$N \cos \beta = m \frac{(v \cos \alpha)^2}{R}$$

$$N \sqrt{1 - (\sin \beta)^2} = m \frac{(v \cos \alpha)^2}{R}$$

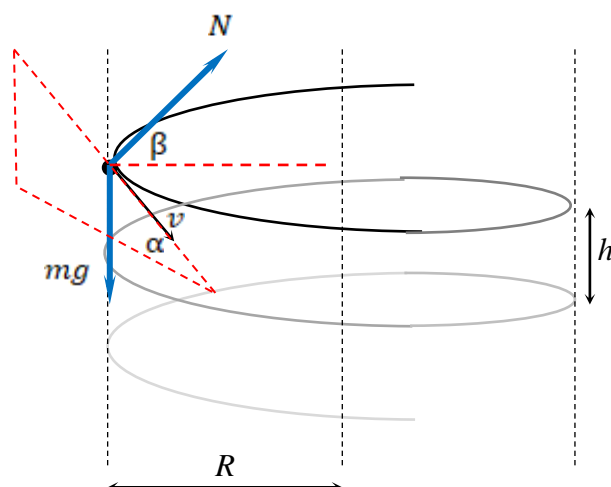
$$N \sqrt{1 - \left(\frac{mg \cos \alpha}{N} \right)^2} = m \frac{(v \cos \alpha)^2}{R}$$

$$\sqrt{N^2 - (mg \cos \alpha)^2} = m \frac{(v \cos \alpha)^2}{R}$$

$$\sqrt{\left(\frac{mg \sin \alpha}{\mu} \right)^2 - (mg \cos \alpha)^2} = m \frac{(v \cos \alpha)^2}{R}$$

$$\left(\frac{g \sin \alpha}{\mu} \right)^2 - (g \cos \alpha)^2 = \frac{(v \cos \alpha)^4}{R^2}$$

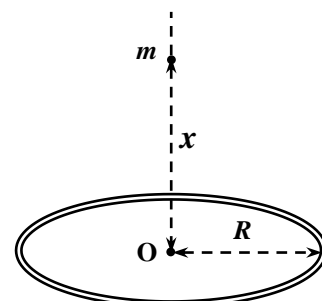
$$v^4 = \frac{(gR)^2}{\mu^2} (\tan^2 \alpha - \mu^2) (\sec^2 \alpha) \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{gR}{\mu}} \sqrt[4]{\left[\left(\frac{h}{2\pi R} \right)^2 - \mu^2 \right] \left[1 + \left(\frac{h}{2\pi R} \right)^2 \right]}$$



彌封處，請勿作答

(題目)

8. 如圖所示，在孤立空間中有一個半徑為 R 、質量為 M 的均質固定細圓環，在垂直環面中心軸上距環心 x 處，靜置一質量 m 的質點，則



- (1) 此時質點與環的重力為何？(4 分)
- (2) 若將質點自由釋放後，當其恰運動到環心 O 點時的速率為何？(4 分)
- (3) 若 $x \ll R$ ，則質點釋放後的運動可視為 S.H.M.，試求出質點的運動週期為何？(4 分)

(答案)

(1) 利用萬有引力公式： $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

將圓環分割成細小質點，每個質點質量為 ΔM

$$F = \sum \frac{Gm\Delta M}{(R^2 + x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{GmMx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \downarrow$$

- (2) 利用力學能守恆

$$E = K + U = 0 + \left(-\frac{GMm}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R} \right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)}$$

(3) $x \ll R$ $F = \frac{GmMx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \approx \frac{GmM}{R^3} x = ma$

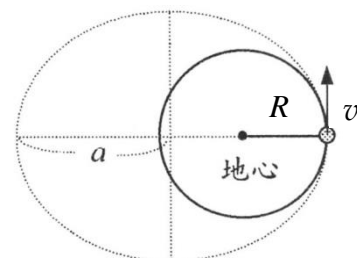
$$\Rightarrow a = \frac{GM}{R^3} x, \text{ 利用簡諧運動特性方程 } \vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

彌封處，請勿作答

(題目)

9. 一太空船以速率 v 繞地心做半徑為 R 的等速圓周運動。太空船上的推進器於某一瞬間沿軌道切線方向噴射，使其速率變成 γv ($\gamma > 1$)。若太空船仍能環繞地球運行，則



- (1) γ 必須小於何數值？(4 分)
- (2) 太空船離地心的最遠點和最近點之間的距離為何(以已知量 R 、 γ 、 v 表示)？(4 分)
- (3) 太空船環繞地球運行的週期變為何(以已知量 R 、 γ 、 v 表示)？(4 分)

(答案)

(1) 以圓軌道運行時 $\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$

此時的總力學能為 $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = -\frac{1}{2}mv^2$

當速率變成 γv 時，總力學能

$$E' = K' + U = \frac{1}{2}m\gamma^2 v^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{1}{2}m\gamma^2 v^2 + (-mv^2) = \frac{1}{2}mv^2(\gamma^2 - 2)$$

若太空船仍能環繞地球運行 $\Rightarrow E' < 0 \Rightarrow \gamma < \sqrt{2}$

- (2) 總力學能

$$E' = K' + U = \frac{1}{2}mv^2(\gamma^2 - 2) = -\frac{GMm}{2a}$$

$$\Rightarrow 2a = -\frac{GMm}{\frac{1}{2}mv^2(\gamma^2 - 2)} = \frac{mv^2 R}{\frac{1}{2}mv^2(2 - \gamma^2)} = \frac{2R}{2 - \gamma^2}$$

- (3) 利用週期定律

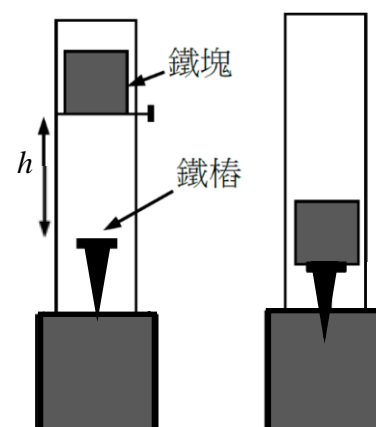
$$\left(\frac{a}{R}\right)^3 = \left(\frac{T'}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow T' = \left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} T = \left(\frac{1}{2 - \gamma^2}\right)^{3/2} \times \frac{2\pi R}{v}$$

彌封處，請勿作答

(題目)

10. 如圖所示為一種打樁機的簡化模型，它可藉由質量 $4m$ 的鐵塊從靜止開始自由下落，將長度為 1 公尺、質量為 m 的鐵樁打入堅硬的岩層中，其中鐵塊最初高度在鐵樁上方 h 。已知鐵塊與鐵樁碰撞後瞬間合而為一，且鐵樁在岩層中受到的阻力與鐵樁深入的距離成正比，且其受到的最大阻力為 $50mg$ ，重力加速度為 g ，則
- (1) 第一次敲擊可將鐵樁敲入岩層中的深度為何？(5 分)
- (2) 承(1)，由鐵塊開始自由下落，到與鐵樁撞成合體，將鐵樁敲入岩層的整個過程中，產生的熱能共計為多少 mgh ？(5 分)



(答案)

(1) 力學能守恆 $4mgh = \frac{1}{2}4mv^2$ ，碰撞瞬間動量守恆 $4mv = (4m+m)v'$ ， $v' = \frac{4}{5}v = \frac{4}{5}\sqrt{2gh}$

碰撞後合體的動能 $K = \frac{1}{2}5m\left(\frac{4}{5}v\right)^2 = \frac{16}{5}mgh$

功能定理 $-W_f + W_{\text{合體重}} = 0 - K$

$-\frac{1}{2}(50mg)x^2 + 5mgx = 0 - \frac{16}{5}mgh \Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{25+320h}}{50}$ 且必須小於等於 1

- (2) 產生的熱能=撞成合體損失的能量+敲入岩層時阻力做的功

$$= \frac{4}{5}mgh + \frac{1}{2} \times 50mg \times \frac{5+\sqrt{25+320h}}{50} = \frac{4}{5}mgh + \frac{1}{2}mg(5+\sqrt{25+320h})$$