

准考證號碼：

姓名：

※ 注意：請務必於右欄填寫「准考證號碼」及「姓名」

### 一、填充題 (每格 12 分，共 72 分)

1. 坐標平面上有一系列點坐標  $P_n(x_n, y_n)$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) 滿足下列關係：已知  $O$  為原點， $P_0(2,2)$ ，以  $O$  為軸心，將  $\overrightarrow{OP_n}$  依逆時針方向旋轉  $\frac{3\pi}{4}$  後，再將長度縮短為原來的  $\frac{1}{2}$  得到  $\overrightarrow{OP_{n+1}}$ 。若將所有在  $x$  軸上的點

$P_n$  按原有順序重新排列成  $A_k(x_k, 0)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ，求  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k =$  \_\_\_\_\_。

Ans:  $\frac{-16\sqrt{2}}{17}$

2. 當  $n$  為正整數時，令  $a_n$  為  $n$  的所有非 0 位數的乘積，例如： $a_4=4$ 、 $a_{35}=3 \times 5=15$ 、 $a_{203}=2 \times 3=6$ 、

$a_{520}=5 \times 2=10$ ，試求  $\sum_{n=1}^{1000} a_n =$  \_\_\_\_\_。

Ans: 94336 (或  $46^3$ )

3. 設四面體  $ABCD$  的各邊邊長分別為  $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = 5$ ， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 6$ ，若平面  $E$  平分兩平面  $ABC$  與  $BCD$  的銳夾角，且平面  $E$  交線段  $\overline{DA}$  於  $M$  點，則  $\frac{\overline{AM}}{\overline{DM}} =$  \_\_\_\_\_。

Ans:  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

4. 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{8n} + \cos \frac{3\pi}{8n} + \cos \frac{5\pi}{8n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{8n} \right) =$  \_\_\_\_\_。

Ans:  $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

5. 已知橢圓  $\Gamma$  的中心為原點，長軸落在  $x$  軸上，且兩焦點之距離與長軸長度的比為  $1:\sqrt{2}$ 。若動點  $Q$  在  $\Gamma$  上，且定點  $P(0,2)$  和  $Q$  點的距離有最大值為  $\sqrt{26}$ ，則此時  $Q$  的坐標為\_\_\_\_\_。

Ans:  $(\pm\sqrt{10}, -2)$

6. 已知凸四邊形  $ABCD$ ， $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ， $\overline{AD} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ， $\angle B = 165^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $\angle D = 120^\circ$ ，則  $\cot \angle ACD =$  \_\_\_\_\_。

Ans:  $1 + \sqrt{3}$